Higher Arithmetic K-theory (Algebraic Number Theory and Related Topics)

AUTHOR(S):
竹田, 雄一郎

CITATION:
竹田, 雄一郎. Higher Arithmetic K-theory (Algebraic Number Theory and Related Topics). 数理解析研究所講究録 2003, 1324: 89-98

ISSUE DATE:
2003-05

URL:
http://hdl.handle.net/2433/43149

数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 89-98

Higher Arithmetic K-theory

九州大学・数理学研究院　竹田　雄一郎 (Yuichiro Takeda)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

Gillet と Soulé は、アラケロフ幾何学における特性類に関する論文 [4] の中で、算術的 K_0 群とよばれるものを定義した。それは、算術的多様体、つまり $\mathbb{Z}$ 上平坦かつ有限型な正則スキーム X に対してきまる加群 $\widehat{K}_0(X)$ である。まずはその定義を思い出してみよう。

X の定義体を複素数体に拡張して得られる複素多様体を $X(\mathbb{C})$ と表す。$X(\mathbb{C})$ には複素共役 ι が反正則に作用する。X の hermitian vector bundle とは、X 上の vector bundle E とその $X(\mathbb{C})$ 上への拡張 $E(\mathbb{C})$ の ι-不変な smooth hermitian metric h の組 $\overline{E}=(E,h)$ のことである。

$$\mathcal{A}^{p,p}(X)=\{\omega;\text{real smooth }(p,p)\text{-form on }X(\mathbb{C})\text{ such that }\iota^*\omega=(-1)^p\omega\}$$

とし、$\widetilde{\mathcal{A}}(X)=\oplus_p\mathcal{A}^{p,p}(X)/(\operatorname{Im}\partial+\operatorname{Im}\overline{\partial})$ とする。このとき、X の算術的 K_0 群 $\widehat{K}_0(X)$ は、X の hermitian vector bundle $\overline{E}$ と $\omega\in\widetilde{\mathcal{A}}(X)$ の組 $(\overline{E},\omega)$ で生成される自由アーベル群を、hermitian vector bundle の short exact sequence $\mathcal{E}:0\to\overline{E'}\to\overline{E}\to\overline{E''}\to 0$ から決まる次の関係式でわって得られる加群として定義される。

$$(\overline{E'},\omega')+(\overline{E''},\omega'')=(\overline{E},\omega'+\omega''+\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E})).$$

ここで、hermitian vector bundle の列が exact というときには、metric のことを無視して、ただ vector bundle の列として exact であるという意味である。また、$\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ の Bott-Chern secondary characteristic class である。さらに彼らは、算術的 K_0 群に関する次の exact sequence を証明している。

$$K_1(X)\to\widetilde{\mathcal{A}}(X)\to\widehat{K}_0(X)\to K_0(X)\to 0.$$

ここで $\widetilde{\mathcal{A}}(X)$ には、X の Deligne コホモロジー $\oplus_pH_{\mathcal{D}}^{2p-1}(X,\mathbb{R}(p))$ が自然に含まれていて、一番左の写像は $K_1(X)$ の regulator 写像である。

定義をみればわかるように、算術的 K_0 群は、Bott-Chern secondary characteristic class が出てくることを除けば、vector bundle の Grothendieck 群の定義に酷似している。代数的 K 理論が vector bundle の Grothendieck 群の高次への拡張であったことを思えば、算術的 K_0 群の高次への拡張がどうような形で存在するのか、というのは自然な問題であろう。

実際[3, 6]において、それはXの代数的K群からDeligneコホモロジーへのregulator写像のコファイバーとして得られるのではないかと書かれている。つまり、ρをXのregulator写像とすると、高次算術的K群は、long exact sequence

$$\cdots \to K_{n+1}(X) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_p H_{\mathcal{D}}^{2p-n-1}(X, \mathbb{R}(p)) \to KM_n(X) \to K_n(X) \xrightarrow{\rho} \cdots$$

をみたすような加群$KM_n(X)$として特徴づけられると述べられている。したがって、もしregulator写像を複体のレベルで記述するものがあれば、$KM_n(X)$は数学的に厳密に定義できるはずである。BurgosとWangによって定義されたhigher Bott-Chern formは、まさにその要請に応えるものであり、そこからある位相幾何的な手続きを経ることによって、そのホモトピー群が$KM_n(X)$になるような単体的集合をつくることができる。

しかし、先に定義した$\widehat{K}_0(X)$は$KM_0(X)$よりもずっと大きな加群であり、$KM_n(X)$は$\widehat{K}_0(X)$の自然な拡張とは認められない。また算術的Chow群との関係からいっても、高次算術的K群は、Xの代数的K群への全射が存在する位、大きな加群であるはずである。

我々はこの小文の中で、高次算術的K理論の新しい定義を与える。我々のK群$\widehat{K}_n(X)$は、$KM_n(X)$を含むより大きな加群であり、$K_n(X)$の、一つ次数の高い$K_{n+1}(X)$のregulator写像のcokernelによる拡大として特徴づけられる。

1. Higher Bott-Chern forms

Mを複素数体上で定義された完備非特異多様体とするとき、Mの代数的K群からDeligneコホモロジーへのregulator写像

$$\rho : K_n(M) \to H_{\mathcal{D}}^{2p-n}(M; \mathbb{R}(p))$$

が定義できる。この写像は、L関数の特殊値に関するBeilinsonの予想に登場するなど、数論幾何ではおなじみの対象である。BurgosとWangによって定義されたhigher Bott-Chern formは、この写像を、コホモロジーを定義する複体のレベルで記述する[2]。この章では、彼らの理論について簡単に復習しよう。

まず、exact cubeの複体を定義する。$\mathfrak{A}$をsmall exact categoryで、zero objectが固定されているとする。$\mathfrak{A}$のn-cubeとは、3つの要素からなる全順序集合$< -1, 0, 1 >$のn個の直積から$\mathfrak{A}$への函手のことである。ここではn-cubeを$\mathcal{F}$で表し、$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in < -1, 0, 1 >^n$の$\mathcal{F}$による像を$\mathcal{F}_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}$で表す。$(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in < -1, 0, 1 >^{n-1}$と整数$1 \leq i \leq n$に対

し、次の 1-cube

$$\mathcal{F}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},-1,\alpha_i,\cdots,\alpha_{n-1}} \to \mathcal{F}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},0,\alpha_i,\cdots,\alpha_{n-1}} \to \mathcal{F}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},1,\alpha_i,\cdots,\alpha_{n-1}}$$

のことを、$\mathcal{F}$ の edge とよぶ。$\mathcal{F}$ のすべての edge が short exact sequence になるとき、$\mathcal{F}$ は exact であるという。例えば、exact 0-cube とは $\mathfrak{A}$ の object のことであり、exact 1-cube とは $\mathfrak{A}$ の short exact sequence のことであり、exact 2-cube とは六つの short exact sequence からなる以下のような可換図式のことである。

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & I. \end{array}$$

整数 $1 \leq i \leq n$ と $-1 \leq j \leq 1$ に対し、$(n-1)$-cube $\partial_i^j \mathcal{F}$ を

$$(\partial_i^j \mathcal{F})_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}} = \mathcal{F}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},j,\alpha_i,\cdots,\alpha_{n-1}}$$

により定義し、これを $\mathcal{F}$ の face とよぶ。すべての exact n-cube で生成される自由加群を、degenerate cube (exact $(n-1)$-cube を自明に拡大することによって得られる exact n-cube) で生成される部分加群で割った加群を、$\widetilde{\mathbb{Z}}C_n\mathfrak{A}$ で表す。Face をとる射 ∂_i^j の交代和を ∂ とすると、アーベル群の複体

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Z}}C_n\mathfrak{A} \xrightarrow{\partial} \widetilde{\mathbb{Z}}C_{n-1}\mathfrak{A} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Z}}C_0\mathfrak{A}$$

が得られる。

次に Waldhausen による S-構成について述べる [8]。$[n]$ を有限全順序集合 $\{0, 1, \cdots, n\}$ とし、$\mathrm{Ar}[n]$ をその射からなる圏とする。$\mathrm{Ar}[n]$ から $\mathfrak{A}$ への函手 E に対して、$E(i \leq j) = E_{i,j}$ と表す。$S_n\mathfrak{A}$ を、以下の条件をみたす函手 $E : \mathrm{Ar}[n] \to \mathfrak{A}$ の集合とする。

(1) $E_{i,i} = 0$.

(2) 任意の整数 $i \leq j \leq k$ に対して、$E_{i,j} \to E_{i,k} \to E_{j,k}$ は $\mathfrak{A}$ の short exact sequence になる。

例えば、$S_0\mathfrak{A}$ は fixed zero object からなる一点集合、$S_1\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}$ の object からなる集合、$S_2\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}$ の short exact sequence からなる集合である。すると、$S\mathfrak{A} : [n] \mapsto S_n\mathfrak{A}$ は simplicial set になり、$S_0\mathfrak{A} = \{0\}$ から自然に基点が定まる。$S\mathfrak{A}$ のホモトピー群は、$\mathfrak{A}$ の代数的 K 群と同型になる、つまり

$$\pi_{n+1}(S\mathfrak{A}, 0) \simeq K_n(\mathfrak{A})$$

がなりたつ。

Burgos と Wang は、S-構成のホモロジー複体から exact cubes の複体への写像

$$\mathrm{Cub} : \mathbb{Z}S_*\mathfrak{A} \to \widetilde{\mathbb{Z}}C_*(\mathfrak{A})[1]$$

を構成した。ここで、[1] は次数を 1 シフトさせる、という意味である。ちなみに、この写像は $\mathbb{Q}$ 係数で quasi-isomorphism になることが McCarthy によって示されている [5]。したがって、$\mathfrak{A}$ の代数的 K 群から exact cube の複体への写像

$$K_n(\mathfrak{A}) = \pi_{n+1}(S\mathfrak{A}, 0) \xrightarrow{Hurevicz} H_{n+1}(\mathbb{Z}S_*\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathrm{Cub}} H_n(\widetilde{\mathbb{Z}}C_*(\mathfrak{A}))$$

は、$\mathbb{Q}$ 係数で同型になる。

ここで、Deligne コホモロジーを与える微分形式の複体を用意する [1]。コンパクトな複素多様体 M に対して、$\mathcal{E}^p_{\mathbb{R}}(M)$ を smooth な p 次の実微分形式のなすベクトル空間、$\mathcal{E}^{p,q}(M)$ を type(p,q) の複素微分形式からなるベクトル空間とする。

$$\mathcal{D}^n(M,p) = \begin{cases} \mathcal{E}^{n-1}_{\mathbb{R}}(M)(p-1) \cap \bigoplus_{\substack{p'+q'=n-1 \\ p'<p, q'<p}} \mathcal{E}^{p',q'}(M), & n < 2p, \\ \mathcal{E}^{2p}_{\mathbb{R}}(M)(p) \cap \mathcal{E}^{p,p}(M) \cap \mathrm{Ker}\, d, & n = 2p, \\ 0, & n > 2p \end{cases}$$

とし、微分 $d_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^n(M,p) \to \mathcal{D}^{n+1}(M,p)$ を、

$$d_{\mathcal{D}}(\omega) = \begin{cases} -\pi(d\omega), & n < 2p-1, \\ -2\partial\bar{\partial}\omega, & n = 2p-1, \\ 0, & n > 2p-1, \end{cases}$$

で定義する。ただし、$\pi : \mathcal{E}^n_{\mathbb{R}}(M) \otimes \mathbb{C} \to \mathcal{D}^n(M,p)$ は、複素微分形式の (p,q)-形式の和への分解からくる自然な射影とする。すると、$(\mathcal{D}^*(M,p), d_{\mathcal{D}})$ のコホモロジーは自然に M の Deligne コホモロジーと同型になる。つまり、

$$H^n(\mathcal{D}^*(M,p), d_{\mathcal{D}}) \simeq H^n_{\mathcal{D}}(M, \mathbb{R}(p))$$

がなりたつ。

以上の準備のもとで、higher Bott-Chern form を定義しよう。M 上の hermitian vector bundle からつくられる exact cube のことを、M 上の exact hermitian cube とよぶことに

する。M 上の exact hermitian n-cube $\mathcal{F}$ の Bott-Chern form とは、次の積分で与えられる M の微分形式のことをいう。

$$\mathrm{ch}_n(\mathcal{F}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{(\mathbb{P}^1)^n} \mathrm{ch}_0(\mathrm{tr}_n(\lambda\mathcal{F})) \wedge T_n.$$

ここで、記号の説明をしよう。まず $\mathrm{tr}_n(\lambda\mathcal{F})$ は、exact hermitian n-cube $\mathcal{F}$ からある標準的な方法で構成される $M\times(\mathbb{P}^1)^n$ の上の hermitian vector bundle、ch_0 は hermitian vector bundle の Chern-Weil form、T_n は $(\mathbb{P}^1)^n$ 上の logarithmic pole をもつある微分形式である。正確な定義は、原論文 [2] を見てほしい。$n=1$ のとき、exact hermitian 1-cube $\mathcal{F}$ の Bott-Chern form $\mathrm{ch}_1(\mathcal{F})$ は、modulo $\mathrm{Im}\,\partial + \mathrm{Im}\,\overline{\partial}$ で、定数倍を除いて $\mathcal{F}$ の Bott-Chern secondary characteristic class と一致する。

Bott-Chern form $\mathrm{ch}_n(\mathcal{F})$ は $\oplus_p \mathcal{D}^{2p-n}(M,p)$ に含まれる微分形式で、複体の間の写像

$$\mathrm{ch} : \widetilde{\mathbb{Z}}\widehat{C}_*(M) \to \oplus_p \mathcal{D}^{2p-*}(M,p) =: \mathcal{D}_*(M)$$

を導く。この写像と Cub の合成

$$\mathrm{ch} : \mathbb{Z}\widehat{S}_*(M) \xrightarrow{\mathrm{Cub}} \widetilde{\mathbb{Z}}\widehat{C}_*(M)[1] \xrightarrow{\mathrm{ch}} \mathcal{D}_*(M)[1]$$

も、同じ記号 ch で表すことにする。これによって、写像

$$K_n(M) = \pi_{n+1}(\widehat{S}(M),0) \xrightarrow{Hurewicz} H_{n+1}(\mathbb{Z}\widehat{S}_*(M)) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \oplus_p H_{\mathcal{D}}^{2p-n}(M,\mathbb{R}(p))$$

が定義できるが、これが M の regulator 写像と一致する、というのが Burgos-Wang の論文 [2] の主定理である。

2. Modified homotopy groups

この章では、高次算術的 K 理論を定義するために必要な、ホモトピー群に対するある修正について述べる。

T を基点つき CW 複体で、基点を $*$ で表す。$\mathrm{sk}_n(T)$ を T の n 次元の skeleton で、$\mathrm{sk}_{-1}(T)=\{*\}$ とする。0 以上の整数 n に対して、$C_n(T)$ を $(\mathrm{sk}_n(T),\mathrm{sk}_{n-1}(T))$ の整係数相対ホモロジー群とする。別の言葉でいうと、$C_n(T)$ は T の n 次元胞体で生成される自由加群である。したがって、面をとる作用の交代和を ∂ とすると、アーベル群の複体

$$\cdots \longrightarrow C_n(T) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(T) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(T)$$

が得られる。これを、T のホモロジー複体とよぶ。この複体のホモロジー群は、T の被約ホモロジーと同型になる。

今、基点つき CW 複体 T に加えて、アーベル群の複体 (W_*, ∂) と複体の準同型 $\rho : C_*(T) \to W_*$ が与えられているとする。$\widetilde{W}_n = W_n / \mathrm{Im}\,\partial$ とする。ここで、基点つき胞体写像 $f : S^n \to T$ と $\omega \in \widetilde{W}_{n+1}$ からなる対 (f, ω) を考え、この対の間にホモトピー同値の関係を導入する。I を閉区間 $[0,1]$ とする。対 (f, ω) が別の対 (f', ω') にホモトープであるとは、次の条件をみたす基点つき胞体写像 $H : (S^n \times I)/(\{*\} \times I) \to T$ が存在することをいう。

(1) $H(x,0) = f(x)$ かつ $H(x,1) = f'(x)$ をみたす。つまり、H は f と f' をつなぐホモトピーである。

(2) $[S^n \times I] \in C_{n+1}(S^n \times I)$ を $S^n \times I$ の fundamental chain とするとき、

$$\omega' - \omega = (-1)^{n+1} \rho H_*([S^n \times I])$$

をみたす。

これが対の同値関係になることはすぐにわかる。すべての対をホモトピー同値関係でわって得られる集合を $\widehat{\pi}_n(T, \rho)$ であらわす。

次に、対の積と逆を定義しよう。基点つき CW 複体 T に対して、二つの T を基点だけを同一視してできる基点つき CW 複体を $T \vee T$ とする。球面 S^n の余積写像 $\mu : S^n \to S^n \vee S^n$ を、S^n の適当な経線を一点につぶす写像とし、逆写像 $\nu : S^n \to S^n$ を、S^n の向きを逆にする標準的な写像とする。二つの基点つき胞体写像 $f, g : S^n \to T$ に対して、その積 $f \cdot g$ と逆 f^{-1} を次のように定義する。

$$f \cdot g : S^n \xrightarrow{\mu} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} T \vee T \to T,$$
$$f^{-1} : S^n \xrightarrow{\nu} S^n \xrightarrow{f} T.$$

これらの写像は、ホモトピー群の演算を定義するときにでてくる、いたって標準的なものである。これらの写像をつかって、対の積と逆を次のように定義する。

$$(f, \omega) \cdot (g, \tau) = (f \cdot g, \omega + \tau),$$
$$(f, \omega)^{-1} = (f^{-1}, -\omega).$$

Theorem 2.1. 上の演算により、$\widehat{\pi}_n(T, \rho)$ は群になる。$n \geq 2$ のとき、これはアーベル

Proof. 上の演算が群の公理をみたすことをいえばよいが、ここでは推移律について述べることにする。その他の公理も同様に証明できる。

3つの基点つき胞体写像 $f, g, h : S^n \to T$ と $\omega, \tau, \eta \in \widetilde{W}_{n+1}$ をとってくる。すると、

$$((f,\omega)\cdot(g,\tau))\cdot(h,\eta) = ((f\cdot g)\cdot h, \omega+\tau+\eta)$$
$$(f,\omega)\cdot((g,\tau)\cdot(h,\eta)) = (f\cdot(g\cdot h), \omega+\tau+\eta)$$

となる。この二つの対は同じではないが、$(f\cdot g)\cdot h$ から $f\cdot(g\cdot h)$ への自然なホモトピーが存在する。つまり、二つの写像はともに

$$S^n \xrightarrow{\alpha,\alpha'} S^n\vee S^n\vee S^n \xrightarrow{f\vee g\vee h} T\vee T\vee T \to T$$

の形に表すことができて、その違いは α と α' の違いからくる。そして α と α' の違いは、球面の経線を二回つぶして三つの球面にするときの、つぶしかたの違いに相当している。したがって、つぶす経線をずらしていくことによって、α から α' へのホモトピーを構成することができる。このホモトピーと、残りの $S^n\vee S^n\vee S^n$ から T への写像を合成することによって、$(f\cdot g)\cdot h$ から $f\cdot(g\cdot h)$ へのホモトピー $H : (S^n\times I)/(\{*\}\times I) \to T$ を構成することができる。$S^n\vee S^n\vee S^n$ は n 次元なので、このホモトピーの像は T の n 次元の skeleton $sk_n(T)$ に含まれるので、$H_*([S^n\times I]) = 0$ がなりたつ。したがって、対の同値関係 (2) から、$((f,\omega)\cdot(g,\tau))\cdot(h,\eta)$ と $(f,\omega)\cdot((g,\tau)\cdot(h,\eta))$ はホモトピー同値になることがわかる。 □

このように定義された群 $\widehat{\pi}_n(T,\rho)$ を、ρ によって修正された、T の n 次ホモトピー群 (n-th homotopy group of T modified by ρ) とよぶ。直感的にいうと、$\widehat{\pi}_n(T,\rho)$ は、球面 S^n から T への写像全体の集合を、$\rho H_*([S^n\times I]) \in \widetilde{W}_{n+1}$ が消えるようなホモトピー H でつながるときに同値である、という関係でわったものである。ただ、単純に同値関係をホモトピー同値よりも弱めるかわりに、写像を常に $\widetilde{W}_{n+1}$ の元とのペアで考え、二つの写像がホモトピー同値だけれどもそれに付随する量 $\rho H_*([S^n\times I])$ が消えないときに、その二つの写像がどれ位ずれているかを測ることができるようにしている。そのことの御利益が、次の定理である。

Theorem 2.2. 次の *exact sequence* が存在する。

$$\pi_{n+1}(T) \xrightarrow{\widetilde{\rho}} \widetilde{W}_{n+1} \xrightarrow{a} \widehat{\pi}_n(T,\rho) \xrightarrow{\zeta} \pi_n(T) \to 0.$$

ここで、ζ は $\widetilde{W}_{n+1}$ の元を忘れることによって得られる写像、a は $\omega \mapsto (0,\omega)$ できまる写像、$\widetilde{\rho}$ は

$$\widetilde{\rho} : \pi_{n+1}(T) \xrightarrow{Hurewicz} H_{n+1}(T) \xrightarrow{H_{n+1}(\rho)} H_{n+1}(W_*) \subset \widetilde{W}_{n+1}$$

である。

次に、修正ホモトピー群に付随する重要な準同型について解説する。$[S^n]$ を球面の fundamental chain とすると、基点つき胞体写像 $f : S^n \to T$ に対して、$f_*([S^n]) \in C_n(T)$ になる。上述の対 (f,ω) に対して、$\rho(f,\omega) = \rho f_*([S^n]) + \partial\omega \in W_n$ とすると、これは修正ホモトピー群からの写像

$$\rho : \widehat{\pi}_n(T,\rho) \to W_n$$

を与える。上の写像の核 $\mathrm{Ker}(\rho)$ を $\widehat{\pi}_n(T,\rho)_0$ で表すと、Thm.2.2 より、次が得られる。

Corollary 2.3. 次の *long exact sequence* が存在する。

$$\cdots \xrightarrow{\zeta} \pi_{n+1}(T) \xrightarrow{\widetilde{\rho}} H_{n+1}(W_*) \xrightarrow{a} \widehat{\pi}_n(T,\rho)_0 \xrightarrow{\zeta} \pi_n(T) \xrightarrow{\widetilde{\rho}} \cdots .$$

3. Higher arithmetic K-theory

以上の準備のもとで、算術的 K 理論の定義を与える。X を $\mathbb{Z}$ 上平坦かつ完備な正則スキームとする。§1 で、コンパクト複素多様体 M に対して Bott-Chern form からつくられる写像

$$\mathrm{ch} : \mathbb{Z}\widehat{S}_*(M) \xrightarrow{\mathrm{Cub}} \widetilde{\mathbb{Z}}\widehat{C}_*(M) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \mathcal{D}_*(M)[1]$$

を導入したが、M として $X(\mathbb{C})$ をとり、計量と微分形式を ι-不変なものに限ることによって、複体の写像

$$\mathrm{ch} : \mathbb{Z}\widehat{S}_*(X) \to \mathcal{D}_*(X)[1]$$

が得られる。ただし左辺は、X 上の hermitian vector bundle のなす圏の S-構成のホモロジー複体、右辺は ι-不変な微分形式からなる $\mathcal{D}_*(X(\mathbb{C}))$ の部分複体の次数 1 シフトである。

修正ホモトピー群の枠組に higher Bott-Chern form をあてはめるには、$\mathbb{Z}\widehat{S}_*(X)$ ではなく、topological realization $|\widehat{S}(X)|$ のホモロジー複体 $C_*(|\widehat{S}(X)|)$ をつかう必要がある。S-構成のホモロジー複体からその topological realization のホモロジー複体へは、自然な全射

$$\mathbb{Z}\widehat{S}(X) \twoheadrightarrow C_*(|\widehat{S}(X)|)$$

がある。この kernel は退化した (degeenrate) 元で生成されるのだが、実はその Bott-Chern form がゼロになることがわかる。つまり、Bott-Chern form は写像

$$\mathrm{ch} : C_*(|\widehat{S}(X)|) \to \mathcal{D}_*(X)[1]$$

を導く。

Definition 3.1. X の高次算術的 K 理論を *higher Bott-Chern form* により修正された $|\widehat{S}(X)|$ のホモトピー群として次のように定義する。

$$\widehat{K}_n(X) = \widehat{\pi}_{n+1}(|\widehat{S}(X)|, \mathrm{ch}).$$

§2 で示した exact sequence を今の場合に適用すると、次の定理が得られる。

Theorem 3.2. 次の *exact sequence* が存在する。

$$K_{n+1}(X) \to \widetilde{\mathcal{D}}_{n+1}(X) \to \widehat{K}_n(X) \to K_n(X) \to 0.$$

$\widetilde{\mathcal{D}}_{n+1}(X)$ には X の *Deligne* コホモロジー $\oplus_p H_{\mathcal{D}}^{2p-n-1}(X, \mathbb{R}(p))$ が自然に含まれ、左の写像は X の *regulator* 写像である。

最初に述べたように、算術的 K_0 群は、生成元と関係式を具体的に与えるという形で既に定義されていた。我々の定義は、その高次への拡張になっている。つまり、Gillet-Soulé の算術的 K_0 群と $\widehat{\pi}_1(|\widehat{S}(X)|, \mathrm{ch})$ との間に、自然な同型が存在する。また、Thm.3.2 の exact sequence は、$n = 0$ の場合、最初に述べた算術的 K_0 群に関する exact sequence と同じものである。

§2 で導入した修正ホモトピー群からの写像を今の場合に適用すると、

$$\mathrm{ch}_n : \widehat{K}_n(X) \to \mathcal{D}_n(X)$$

が得られる。その kernel を $KM_n(X)$ と表すと、long exact sequence

$$\cdots \to K_{n+1}(X) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_p H_{\mathcal{D}}^{2p-n-1}(X, \mathbb{R}(p)) \to KM_n(X) \to K_n(X) \to \cdots$$

が得られる。つまり $KM_n(X)$ は、[3, 6] の中でその存在が予想されていた、Bott-Chern form のコファイバーとして定義される群に他ならない。$\widehat{K}_n(X)$ は、その群を含む、より大きな群である。

REFERENCES

[1] J.I. Burgos, *Arithmetic Chow rings and Deligne-Beilinson cohomology*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 335–377.

[2] J.I. Burgos and S. Wang, *Higher Bott-Chern forms and Beilinson's regulator*, Invent. Math. **132** (1998), 261–305.

[3] P. Deligne, *Le déterminant de la cohomologie*, Contemp. Math. **67** (1987), 93–178.

[4] H. Gillet and C. Soulé, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metric*, Ann. of Math. **131** (1990), 163–238.

[5] R. McCarthy, *A chain complex for the spectrum homology of the algebraic K-theory of an exact category*, Algebraic K-theory, Fields Inst. Commun. vol.16, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, pp.199–220.

[6] C. Soulé, *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[7] Y. Takeda, *Higher arithmetic K-theory*, preprint.

[8] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces*, in Algebraic and geometric topology, Lecture Notes in Math. vol.1126, Springer, Berlin, 1980, pp.318–419.